Un problème inverse pour l'équation d'onde dans un domaine anisotrope perturbé

Houssem LIHIOU

LR Analysis and Control of PDEs
Department of Mathematics
Faculty of Sciences of Monastir

09 Mai 2023

Plan

Formulation du problème

Considère $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domain anisotrope borné de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec bord $\partial\Omega$. Suppose que $\mathcal{D} \subset \Omega$ non vide et $\Gamma \subset \partial\Omega$ mésurable connexe. Soit $\nu(x)$ le vecteur extérieur normal.

Définition (Domaine anisotrope)

Un domaine est dit anisotrope si ses caractéristiques varient suivant la direction considérée.

Introduire la conductivité anisotrope inhomogène

$$A_\delta(x) = I + \delta A(x), \quad x \in \Omega,$$

avec I la matrice identité d'order 2, $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq 2}$ symétrique et $\delta > 0$ suffisamment petit.
Soit

$$c_1 |\xi|^2 \leq A(x)\xi.\xi \leq c_2 |\xi|^2, \;\; x \in \overline{\Omega}, \;\; \xi \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

avec $c_1, c_2 > 0$.
Suppose que

$$A(x) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{2\times 2}) \quad \textit{telle que} \quad A = 0_{\mathbb{R}^{2\times 2}} \quad \textit{dans} \quad \Omega \backslash \overline{\mathcal{D}}.$$

Définir la dérivée normal en $x \in \partial\Omega$ par

$$\partial_\nu u(x) = \nu(x).\nabla u(x)$$

Considère le problème suivant

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - divA_\delta \nabla) u_\delta = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ u_\delta|_{t=0} = \varphi, \ \partial_t u_\delta|_{t=0} = \psi \text{ dans } \Omega, \\ u_\delta|_{\partial\Omega \times [0,T]} = f. \end{cases} \tag{2}$$

Le problème (2) admet une unique solution faible $u_\delta \in \mathcal{C}^0([0, T], H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T], L^2(\Omega))$ et $\partial_\nu u(x) \in L^2([0, T], \partial\Omega)$.

V. Komornik
Exact controllability and stabilization: The multiplier method,
Res. Appl. Math., Vol. 36 (1994), Wiley-Masson.

Soit u la solution du problème (2) non perturbé, c-à-d, $\delta = 0$

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ u|_{t=0} = \varphi, \ \partial_t u|_{t=0} = \psi \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega \times [0,T]} = f. \end{cases} \tag{3}$$

où les conditions initiales $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et la condition au bord $f \in \mathcal{C}^\infty([0, T], \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega))$.
Sous les conditions précédentes, le problème (3) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^\infty([0, T], \overline{\Omega})$.

L. C. Evans
Partial Differential Equations,
Grad. Stud. Math. 19, 2nd edition, AMS, Providence, RI, (2010).

Le problème inverse qui nous intéresse ici peut être formulé comme suit:
À partir de la connaissance de l'opérateur de Dirichlet to Neumann sur une partie du bord

$$u_\delta|_{\Gamma\times[0,T]} \longmapsto \partial_\nu u_\delta|_{\Gamma\times[0,T]},$$

avec $\Gamma \subset \partial\Omega$ et $T > 0$,
peut-on reconstruire $A(x) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?

Soit v_ξ donnée par

$$\left\{\begin{array}{l} (\partial_t^2 - \Delta) v_\xi = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ v_\xi|_{t=0} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \partial_t v_\xi|_{t=0} = i\, div(A(x)\xi \exp(i\xi.x)) \in L^2(\Omega), \\ v_\xi|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Le système (4) admet une unique solution
$v_\xi \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T], H^{-1}(\Omega))$ et $\partial_\nu v_\xi \in L^2([0, T], L^2(\Gamma))$.

J. L. Lions
Contrôlabilité exacte, Perturbations et stabilisation de systèmes distribués, Tome 1: Contrôlabilité Exacte,
Masson-Paris, (1988).

Introduire

$$\tilde{u}_\delta(x,t) = u(x,t) + \delta \int_0^t \exp(-i|\xi|s) v_\xi(x, t-s) ds, \; x \in \Omega, \; t \in [0, T]. \quad (5)$$

Par un changement de variable, on a

$$\int_0^t \exp(-i|\xi|s) v_\xi(x, t-s) ds = \exp(-i|\xi|t) \int_0^t \exp(i|\xi|s) v_\xi(x, s) ds. \quad (6)$$

Ainsi,

$$\partial_t\left(\int_0^t \exp(-i|\xi|s) v_\xi(x, t-s) ds\right)$$

$$= -i|\xi| \exp(-i|\xi|t) \int_0^t \exp(i|\xi|s) v_\xi(x, s) ds + v_\xi(x, t).$$

Il s'ensuit que $\tilde{u}_\delta$ satisfait le système suivant

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)\tilde{u}_\delta = i\,\delta\, div(A(x)\xi \exp(i\xi.x)) \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ \tilde{u}_\delta|_{t=0} = \exp(i\xi.x) \text{ dans } \Omega, \\ \partial_t \tilde{u}_\delta|_{t=0} = 0 \\ \tilde{u}_\delta|_{\partial\Omega\times[0,T]} = \exp(i\xi.x - i|\xi|t). \end{cases} \tag{7}$$

Ainsi, $u_\delta - \tilde{u}_\delta$ satisfait le système suivant

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - div(A_\delta\nabla))(u_\delta - \tilde{u}_\delta) = \delta^2 div(A(x)\nabla(\int_0^t \exp(-i|\xi|s) \\ v_\xi(x, t-s)ds)) \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ (u_\delta - \tilde{u}_\delta)|_{t=0} = \exp(i\xi.x) \text{ dans } \Omega, \\ \partial_t(u_\delta - \tilde{u}_\delta)|_{t=0} = 0 \\ (u_\delta - \tilde{u}_\delta)|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Estimation de normes

Proposition 1

Soient u et u_δ les solutions des problèmes (3) et (2) respectivement. Soit $\tilde{u}_\delta$ définie par (5). Alors, pour δ suffisamment petit, il existe deux constants réels C et C' tels que

$$\|u_\delta - u\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))} \leq C\delta, \tag{9}$$

et

$$\|u_\delta - \tilde{u}_\delta\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))} \leq C'\delta^2, \tag{10}$$

avec C et C' sont indépendants de δ.

Corollaire 1

Soit $u_\delta - \tilde{u}_\delta$ définie par (8). Pour δ suffisamment petit, on a l'estimation suivante

$$\|\partial_\nu (u_\delta - \tilde{u}_\delta)\|_{L^2(\Gamma)} = O(\delta^2) \tag{11}$$

Principaux résultats

Notre objectif est de reconstruire la matrice symétrique définie positive

$$A \in \Upsilon := \{A(x) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),\ A(x) = 0_{\mathbb{R}^{2\times 2}}, x \in \Omega \backslash \overline{\mathcal{D}},$$
$$c_1|\xi|^2 \leq A(x)\xi.\xi \leq c_2|\xi|^2, x \in \mathcal{D}\}.$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}^2$ un vecteur arbitraire. Sous les conditions initiales particulières

- $\varphi(x) = \exp(ix.\xi)$,
- $\psi(x) = -i|\xi| \exp(ix.\xi)$
- $f(x,t) = \exp(ix.\xi - i|\xi|t)$,

alors la solution u que le système (3) est donnée par

$$u(x,t) = \exp(ix.\xi - i|\xi|t), \quad dans \quad \Omega \times [0, T].$$

Soit $\beta(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ la fonction de cutoff telle que $\beta(x) \equiv 1$ in $\mathcal{D}$. Soit ϖ_ξ la fonction définie par

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)\varpi_\xi = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ \varpi_\xi|_{t=0} = \beta(x)\exp(ix.\xi), \\ \partial_t \varpi_\xi|_{t=0} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \varpi_\xi|_{\Gamma \times [0,T]} = g_\xi, \\ \varpi_\xi|_{\partial\Omega \setminus \bar{\Gamma} \times [0,T]} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Le problème de la contrôlabilité exacte au bord pour le système (12) peut être formulé comme suit:
Étant donné $T > 0$, $\varpi_\xi|_{t=0}$ et $\partial_t \varpi_\xi|_{t=0}$, peut-on trouver un contrôle $g_\xi \in H_0^1([0, T], L^2(\Gamma))$ tel que la solution de (12) satisfait $\varpi_\xi(T) = \partial_t \varpi_\xi(T) = 0$?.

- La réponse de la question précédente est positive si Γ et T contrôlent géométriquement Ω.

Définition (Bardos et al.)

Soit $T > 0$ un temps final donné et Γ une partie du bord $\partial\Omega$. On dit que Γ et T contrôlent géométriquement Ω si pour tout point $x \in \Omega$, le rayon commençant en x au temps $t = 0$ rencontre Γ en un point non diffractif avant le temps T.

C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch
Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary,
SIAM J. Control Opt., 30 (1992), pp. 1024-1065.

Soit θ_ξ la solution unique dans $H^1([0,T],L^2(\Gamma))$ de l'équation de Volterra

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t\theta_\xi(x,t) + \displaystyle\int_t^T \exp(-i|\xi|(s-t))[\theta_\xi(x,s) - i|\xi|\partial_t\theta_\xi(x,s)]ds \\ = g_\xi(x,t),\ x \in \Gamma,\ t \in [0,T], \\ \theta_\xi(x,0) = 0,\ x \in \Gamma. \end{array}\right. \tag{13}$$

Il s'ensuit que θ_ξ est l'unique solution de

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t^2\theta_\xi - \theta_\xi = \exp(i|\xi|t)\partial_t(\exp(-i|\xi|t)g_\xi),\ x \in \Gamma,\ t \in [0,T], \\ \theta_\xi(x,0) = 0,\ \partial_t\theta_\xi(x,T) = 0,\ x \in \Gamma. \end{array}\right. \tag{14}$$

Proposition 2

Soit θ_ξ la solution de (14). Soit g_ξ le contrôle au bord dans (12). Alors, on a

$$\int_0^T \int_\Gamma [\theta_\xi \partial_\nu (u_\delta - u) + \partial_t \theta_\xi \partial_t \partial_\nu (u_\delta - u)]$$
$$= - \int_0^T \int_\Gamma \exp(i|\xi|t) \partial_t (\exp(-i|\xi|t) g_\xi) \partial_\nu (u_\delta - u).$$

Clé de preuve: Intégration par partie.

Lemme 1

Soit g_ξ le contrôle au bord de (12). Suppose que Γ et T contrôlent géométriquement Ω. Alors, on obtient

$$\int_0^T \int_\Gamma g_\xi \partial_\nu v_\xi = \int_{\mathcal{D}} A(x)\xi.\xi \exp(2ix.\xi) dx.$$

Clé de preuve: Formule de Green.

Théorème 1

Soit $A \in \Upsilon$ une matrice définie postive symétrique. Définir φ, ψ et, f comme précédemment. Soit u_δ la solution unique dans $\mathcal{C}^0([0,T], H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], L^2(\Omega))$ de l'équation d'onde (2). Suppose que Γ et T contrôlent géométriquent Ω. Alors

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Gamma \exp(i|\xi|t)\partial_t(\exp(-i|\xi|t)g_\xi)\partial_\nu(u_\delta - u)\\ &= -\delta \int_{\mathcal{D}} A(x)\xi.\xi \exp(2ix.\xi)dx + O(\delta^2),\end{aligned}$$

avec g_ξ est le contrôle au bord dans (12).
Le terme $O(\delta^2)$ est independant de la matrice $A(x)$ mais dépend uniquement de c_1 et c_2.

Idée de preuve du Théorème 1

- Inséré $\tilde{u}_\delta$ dans $\displaystyle\int_0^T \int_\Gamma [\theta_\xi \partial_\nu (u_\delta - u) + \partial_t \theta_\xi \partial_t \partial_\nu (u_\delta - u)$.
- En utilisant Lemme 1, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Gamma [\theta_\xi \partial_\nu (u_\delta - u) + \partial_t \theta_\xi \partial_t \partial_\nu (u_\delta - u)] \\
&= \delta \int_{\mathcal{D}} A(x)\xi.\xi \exp(2ix.\xi) dx \\
&+ \int_0^T \int_\Gamma [\theta_\xi \partial_\nu (u_\delta - \tilde{u}_\delta) + \partial_t \theta_\xi \partial_t \partial_\nu (u_\delta - \tilde{u}_\delta)].
\end{aligned}$$

- À l'aide de Corollaire 1, on obtient
$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Gamma [\theta_\xi \partial_\nu (u_\delta - u) + \partial_t \theta_\xi \partial_t \partial_\nu (u_\delta - u)] \\
&= \delta \int_{\mathcal{D}} A(x)\xi.\xi \exp(2ix.\xi) dx + O(\delta^2).
\end{aligned}$$
- L'argument donné par la Proposition 2 achieve la preuve.

Cas isotrope:

Si $A(x) = a(x)I$, avec a est une fonction scalaire et I est la matrice identité alors on a d'après le Théorème 1, on a

$$\int_0^T \int_\Gamma \exp(i|\xi|t)\partial_t(\exp(-i|\xi|t)g_\xi)\partial_\nu(u_\delta - u)$$
$$= -\delta|\xi|^2 \int_{\mathcal{D}} a(x)\exp(2ix.\xi)dx + O(\delta^2).$$

En négligeant $O(\delta^2)$ et en utilisant l'inversion de Fourier, on obtient l'approximation suivante

$$a(x) \approx -\frac{2}{\delta}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\exp(-2ix.\xi)}{|\xi|^2}\int_0^T \int_\Gamma \exp(i|\xi|t)\partial_t(\exp(-i|\xi|t)g_\xi)$$
$$\partial_\nu(u_\delta - u).$$

Perspectives

- Les résultats obtenus ici peuvent être étendues pour l'équation de chaleur dans un domaine anisotrope.
- Pour le cas stationnaire, la reconstruction asymptotique de $A(x)$ peut être possible en identifiant $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$ et en utilisant les solutions complexes d'optiques géométriques dans un domaine anisotrope.

H. Takuwa, G. Uhlmann, and J. N. Wang
Complex geometrical optics solutions for anisotropic equations and applications
J. of Inverse and Ill Posed Problems, 16 (2008), pp. 791-804..

References

- H. Ammari, An inverse initial boundary value problem for the wave equation in the presence of imperfections of small volume, SIAM J. Control Opt. 41 (2002), pp. 1194-1211.
- C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary, SIAM J. Control Opt., 30 (1992), pp. 1024-1065.
- L. C. Evans, Partial Differential Equations, Grad. Stud. Math. 19, 2nd edition, AMS, Providence, RI, (2010).
- V. Komornik, Exact controllability and stabilization: The multiplier method, Res. Appl. Math., Vol. 36 (1994), Wiley-Masson.
- H. Lihiou, Coefficient inverse problem for anisotropic time-domain wave equation, Math. Cont. Rela. Fiel., AIMS, pp. 1-10, (2023).
- J. L. Lions, Contrôlabilité exacte, Perturbations et stabilisation de systèmes distribués, Tome 1: Contrôlabilité Exacte, (1988), Masson.