

Spectral abscissa on graphs: an overview

Rachid Assel

Faculté des Sciences de Monastir

CTIP'23, 8-10 mai 2023 Monastir

Outline

- 1 Contexte : abscisses spectrales
- 2 Modèle : Les ondes amorties sur un graphe
- 3 Exemples
- 4 Références

Abscisses spectrales

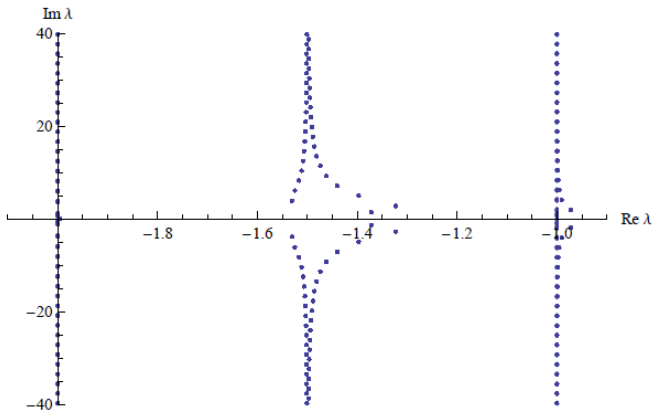
Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur sur un Hilbert $X \supset D(\mathcal{A})$.

Définition

$\omega \in \mathbb{R}$ est une abscisse spectrale à hautes fréquences (HFSA) de \mathcal{A} s'il existe suite $(\lambda_n)_n$ de valeurs propres de \mathcal{A} telle que

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \Im(\lambda_n) = \pm\infty$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \Re(\lambda_n) = \omega$.

Abscisses spectrales



Motivation

Dans le cas dissipatif :

- HF ($\lambda \rightarrow \infty$): le comportement des états propres est lié à celui des valeurs propres
- Le comportement de l'énergie à temps large peut être quantifié à l'aide de l'abscisse spectrale.
 - si $\omega = 0$ est une HFSA alors il n'y a pas de décroissance exponentielle.
 - si $\omega_0 = \sup\{\omega; \omega \text{ est HFSA}\} < 0$, alors l'énergie décroît en $e^{\omega_0 t}$.

Modèle : Les ondes amorties sur un graphe

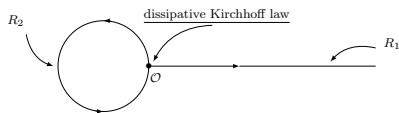
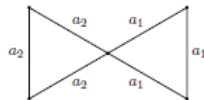
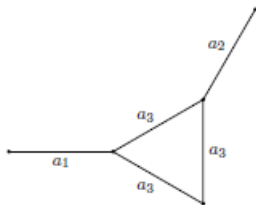
Graphe métrique

C'est une structure branchée :

$$\Gamma = \bigoplus_{j=1}^N e_j, \quad N \geq 1$$

- $e_j, j = 1, \dots, N$, sont les arêtes (branches)
- on prend $0 < |e_j| = \ell_j < \infty$, i.e. un graphe fini (compact)
- les noeuds de Γ sont les $v_{j,k} = e_j \cap e_k$.
- une boucle (circuit) est une trajectoire fermée dans Γ

Modèle : Les ondes amorties sur un graphe



Modèle : Les ondes amorties sur un graphe

$$\partial_t^2 u + 2a(x)\partial_t u = \partial_x^2 u + b(x)u \quad (1)$$

- $u = u(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \Gamma$;
- $u = (u_1, \dots, u_N)$, $u_j = u|_{e_j}$
- collection de N équations d'ondes (1d), chacune sur une arête, identifiée à un segment de \mathbb{R} .
- C.I. & C.B. & C. de couplage aux noeuds.

Modèle : Les ondes amorties sur un graphe

$$\partial_t^2 u_j(t, x) + 2a(x)\partial_t u_j(t, x) = \partial_x^2 u_j(t, x) + b_j(x)u_j(t, x), \quad x \in e_j.$$

- l'amortissement $a = (a_1, \dots, a_N)$ dépend de x .
- le potentiel $b = (b_1, \dots, b_N)$ dépend de x .
- on pose $A = \text{diag}(a)$, $B = \text{diag}(b)$, des matrices $N \times N$,
- l'opérateur $H_A = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ \partial_x^2 + B & -2A \end{pmatrix}$ sur $D(H_A)$
- en posant $\Psi = (u, \partial_t u)^t$, alors $\partial_t \Psi = H_A \Psi$, $\Psi \in D(H_A)$.

Modèle : Les ondes amorties sur un graphe

$$\partial_t^2 u_j(t, x) + 2a_j(x)\partial_t u_j(t, x) = \partial_x^2 u_j(t, x) + b_j(x)u_j(t, x), \quad x \in e_j.$$

- ondes planes : $u_j(t, x) = e^{\lambda t} v_j(x)$, alors

$$v_j'' - (\lambda^2 + 2\lambda a_j(x) - b_j(x))v_j(x) = 0.$$

- le comportement asymptotique de v_j quand $\Im \lambda \rightarrow \infty$ est connu,
- le comportement de u_j à grand t dépend aussi de celui de λ quand $\Im \lambda \rightarrow \infty$.

Modèle : Les ondes amorties sur un graphe

"Calcul" des valeurs propres : l'équation caractéristique

$$\lambda \text{ valeur propre de } H_A \text{ ssi } \Phi(\lambda) = 0 \quad (2)$$

- obtenue à travers la condition de domaine $D(H_A)$
- Φ est en général un polynôme d'exponentielles
- utilité du Th. de Rouché : comparer à un cas de référence (résoluble), par exemple le cas $A = 0$, $A = \text{constant}$, ...

Modèle : Les ondes amorties sur un graphe

Théorème : Cas équilatéral

On suppose toutes les arêtes de longueur 1, $a \in \mathcal{C}^{N+1}$, $b \in \mathcal{C}^N$.
Alors, $\exists C_0 > 0$ pour $C > C_0$, si $\lambda = r \pm iC$ est v.p. de H_A alors
 $\lambda \pm 2i\pi + O(\frac{1}{C})$ est également une v.p..

Conséquence : il y a une abscisse spectrale :

$$\exists \lambda_n \in \sigma(H_A); \lambda_n \sim 2i\pi n + \omega_0 + O\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty.$$

Modèle : Les ondes amorties sur un graphe

Normalisation

Le lieu du spectre à hautes fréquences ne dépend que des moyennes de a et de b ,

i.e. si on remplace les fonctions a_j et b_j par

$$\tilde{a}_j = \frac{1}{|e_j|} \int_{e_j} a_j(x) dx, \quad \text{resp } \tilde{b}_j = \frac{1}{|e_j|} \int_{e_j} b_j(x) dx$$

alors les v.p. de H_A et $H_{\tilde{A}}$ ont la même asymptotique à HF.

(vrai pour des longueurs \mathbb{N} -proportionnelles $\frac{|e_k|}{|e_j|} \in \mathbb{N}$.)

Modèle : Les ondes amorties sur un graphe

Localisation

Théorème

λ valeur propre de H_A . Alors

$$\Re \lambda \in \left[-\max_j \tilde{a}_j, -\min_j \tilde{a}_j \right].$$

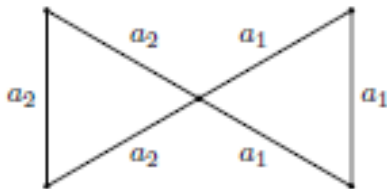
Modèle : Les ondes amorties sur un graphe

Fonction de comptage des abscisses spectrales : 3 résultats

- 1 Borne sup: graphe équilatéral, a, b constants, alors il y a au plus $2N$ HFSA.
- 2 Borne sup: graphe équilatéral sans circuit (boucle), a, b de classe \mathcal{C}^2 , alors il y a au plus N HFSA.
- 3 Borne inf: graphe équilatéral, noeuds de degrés impairs, alors il existe a tel que le nombre de HFSA est $\geq N$.

Exemple: 2 boucles

Exemple un : graphe avec deux boucles $N = 6$.



avec Dirichlet aux extrémités libres et Kirchoff au noeuds

exemple: 2 boucles

Exemple un: graphe avec deux boucles $N = 6$.

L'équation aux valeurs propres est

$$(\mu_1 + \mu_2) \sinh\left(\frac{3(\mu_1 + \mu_2)}{2}\right) + (\mu_1 - \mu_2) \sinh\left(\frac{3(\mu_1 - \mu_2)}{2}\right) = 0$$

$$\mu_j = \sqrt{\lambda^2 + 2a_j\lambda - b_j}, \quad j = 1, 2.$$

Posant $\lambda_n = 2i\pi n + \omega_0 + O(1/n)$, $n \rightarrow \infty$, on trouve

$$\omega_0 \in \left\{ -a_1, -a_2, -\frac{a_1 + a_2}{2} \right\}.$$

Exemple: 2 boucles

Exemple un: graphe avec deux boucles $N = 6$.

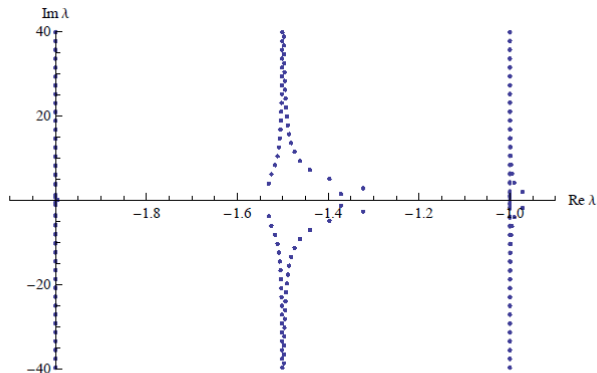
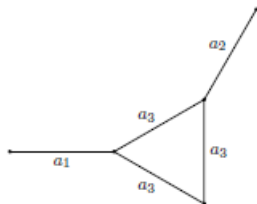


FIG. 2. Spectrum of a graph in figure 1, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$

Exemple: 1 boucle

Exemple deux: graphe avec une boucle $N = 5$.



Exemple: 1 boucle

Exemple deux : graphe avec une boucle $N = 5$.

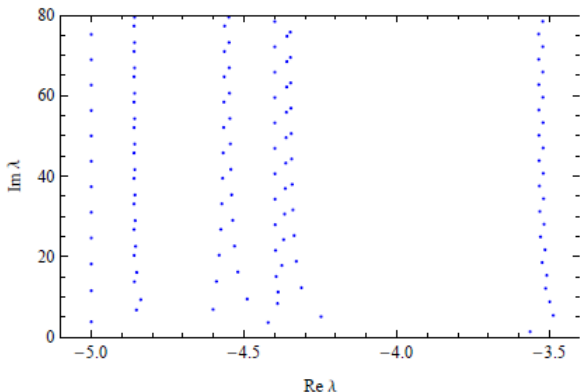


FIGURE 8. Spectrum of the graph in figure 7 for $\alpha_1 = 3$.

Exemple: 1 boucle

Exemple trois : graphe avec une boucle $N = 4$.



Exemple: 1 boucle

Exemple trois : graphe avec une boucle $N = 4$.

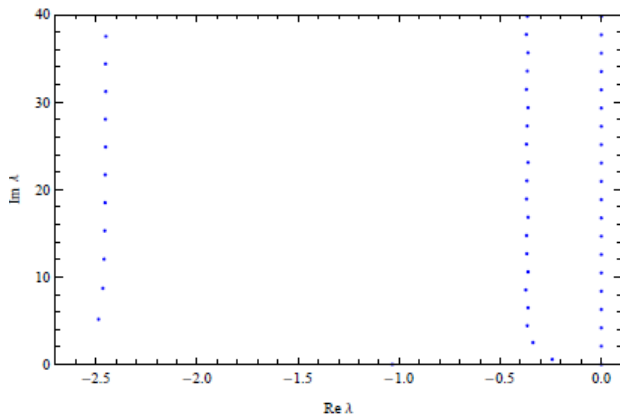
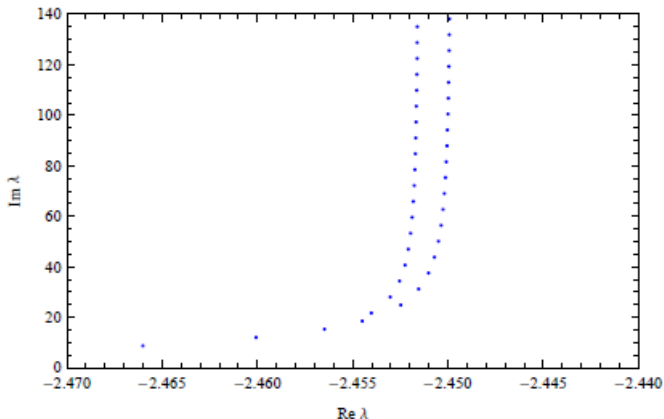


FIGURE 4. Spectrum of the graph in figure 3 for $a_1 = 3$,

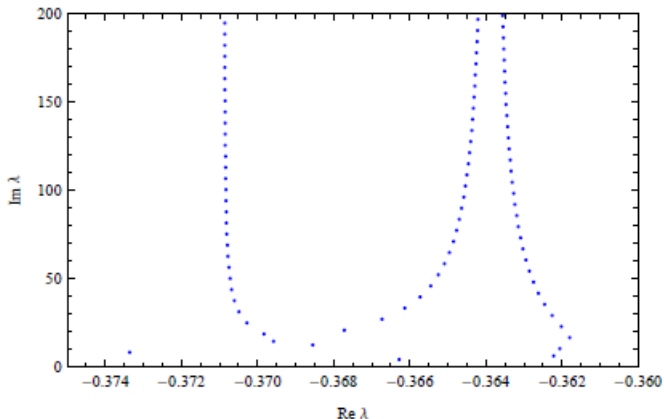
Exemple: 1 boucle

Exemple quatre : graphe avec une boucle $N = 4$.



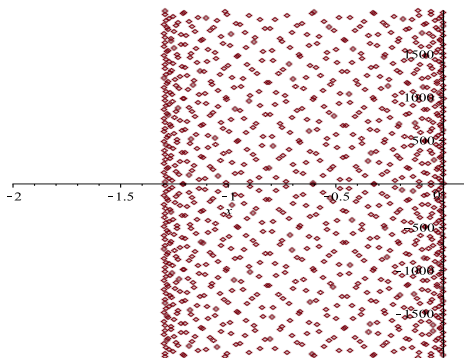
Exemple: 1 boucle

Exemple quatre : graphe avec une boucle $N = 4$.



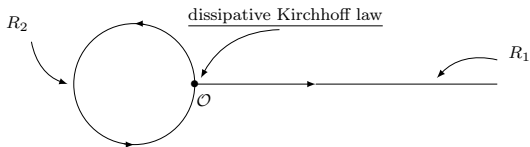
Exemple: stargraph

Exemple cinq : stargraph 1 noeud et $N = 8$.



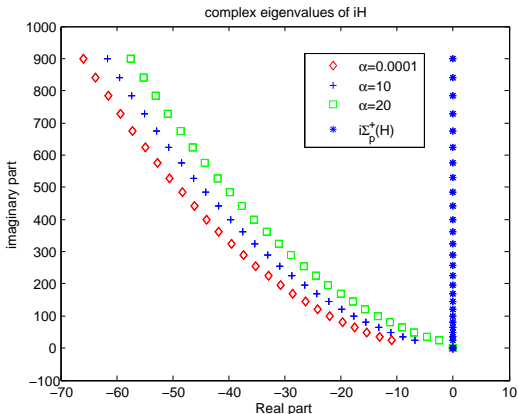
Exemple: tadpole avec 1 boucle

Exemple six : tadpole avec une boucle $N = 2$.



Exemple: tadpole avec 1 boucle

Exemple six : tadpole avec une boucle $N = 2$.



Quelques références

Quelques références

- 1 Bolte, J.- Endres, S.: The trace formula for quantum graphs, Ann. IHP, (2009).
- 2 Lipovsky, J.. Damped wave equation on metric graphs, Nanosystems, (2015).
- 3 Gesztesy, F.- Holden, H.: The damped string problem revisited, JDE (2011).
- 4 Kottos, T., Smilansky, U.: Quantum chaos on graphs, Phys. Rev. Lett, (1997).
- 5 Kuchment, P.: Quantum graphs I & II.